مثال: /على شبه المترية أو المسافة أو عدم تحققها/ :

- إن التطبيق (التابع) المعرف بالشكل :

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n)$$

ليس مسافة لعدم تحقق الشرط الثاني من شروطها أي : إذا كان :

$$d(x,y) = 0 \not\Rightarrow x = y$$

إذا افترضنا أن كل من $x_n$ و $y_n$ متتاليات عقدية ولكنه شبه مترية أو مسافة

لأن : $d(x,y) = 0 \not\Rightarrow x = y$

ولتوضيح :

$$x_n = \frac{1}{n} \quad , \quad y_n = 0 \quad ; \quad n \geq 1$$

$$d(x,y) = 0 \quad , \quad x_n \neq y_n \quad ; n \geq 1$$

3-] لنضيف هنا بعض الفضاءات المترية :

P-) فضاء المتتاليات العددية المحدودة $l_\infty$ :

كما نعلم أن $l_\infty$ هو مجموعة كل المتتاليات العددية المحدودة مثل $x = \{x_k\}$

أي أن $|x_k| \leq m_x$ حيث $m$ يتعلق بـ $x$ ولا يتعلق بـ $k$ من أجل

كل الأعداد $k \geq 1$ ..

بفرض $x = \{x_k\}$ و $y = \{y_k\}$ من $l_\infty$ ولنعرف المسافة أو المتريك

على هذا الفضاء بالعلاقة :

$$d(x,y) = \sup_k |x_k - y_k| \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots \quad \ldots (*_1)$$

وبالمثل من أجل المتتاليات المحدودة من الأعداد العقدية أي أن كل عنصر

منه هي متتالية عقدية :

$$x = \{x_k\} \qquad x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$$

Alnour

Scanned by CamScanner

هذه المسافة ($*_1$) نعرفها أيضاً على $c$ (فضاء كل المتتاليات المتقاربة)
أما في الفضاء $c_0$ (فضاء المتتاليات المتقاربة من الصفر) نعرف المترك على
النحو التالي:

$$d(x,y) = \max_k |x_k - y_k| \quad ; \quad x,y \in c_0$$

ويمكن هنا إضافة الكثير من الفضاءات المترية كل حسب الرمز الخاص به أو
المسافة الخاصة به.

ب-) فضاء المتتاليات المتغيرة المحدودة : $l_{(p)}$ : $(1 \leq p < \infty)$
$p = \{p_k\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة..
$l_p^*$ هو نفس الفضاء السابق : $p_k$ ثابتة من أجل أي قيمة لـ $k$
$l_2$ : فضاء هلبرت للمتتاليات الحقيقية والعقدية (حيث وضعنا في
$l_{p}$ ; $p=2$ : أي هو المجموعة:

$$l_2 = \{x = \{x_n\} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

ونعرف المسافة عليه بالشكل:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}$$

ت-) $BV[a,b]$ : فضاء التوابع ذ.ت.م على $[a,b]$ والمسافة
له بالشكل:

$$d(f,g) = |f(a) - g(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(f-g) \quad ; \quad f,g \in BV[a,b]$$

$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ التغير الكلي لـ $f$ على $[a,b]$

مثال:

ليكن $f = x^2 \quad , \quad g = 2x - 1 \quad ; x \in [0,1]$

Alnour

Scanned by CamScanner

/ /

احسب المسافة بينهما حسب (ت) ..

٥. علينا أن نثبت أولاً أن كل من f و g دالة ذات جم لأن كل منها مطردة بتزايد على الفترة [ ١ ,٠ ] ومنه:

$$d(x^2, 2x-1) = |0-(-1)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(x^2-2x+1)$$
$$= 1 + \overset{b}{\underset{a}{V}}((x-1)^2)$$

ث-)

بالإضافة إلى الفضاءات العقدية مثل $C_{[0,1]}$ والمسافة فيه:

$$d(x,y) = \max_t |x(t) - y(t)| \quad ; \quad x(t), y(t) \in C_{[0,1]}$$

$L_p[0,1]$ حيث المسافة فيه:

$$d(x,y) = \left[\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

فضاء التوابع الكمولة على [ ١ ,٠ ] من الدرجة p ..

- كل ما سبق يعتبر فضاء متري حسب المسافة التي تعطى على هذا الفضاء

سؤال:

هل كل فضاء متري هو محدود، مع التعليل ..

٥. كلا، ليس من الضروري أن يكون كل فضاء متري هو محدود فمثلاً الفضاء التالي $(\mathbb{R}, |\ |)$ فضاء الأعداد الحقيقية المألوف فضاء متري كما نعلم وهو غير محدود (البنية الجبرية لـ $\mathbb{R}$ بين ذلك) المجموعة المكونة للبنية الجبرية للفضاء $\mathbb{R}$ غير محدودة .. وبالنسبة للفترة [ ١ ,٠ ] فهي محدودة لأن: $d((0,1)) = 1$ ولكنه غير منتهٍ، أي أنه يملك عدد غير منتهٍ من النقاط كما نعلم.

-) يمكن في أي فضاء متري $(X, d)$ محدود أو غير محدود بناء فضاء متري محدود $(X, \rho)$ حيث الأخير معرف بالدستور:

Alnour

Scanned by CamScanner

/ /

$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad ; \ d(x,y) = |x-y|$$

$\forall \{x,y\} \in \mathbb{R}$

4-] المسافة بين مجموعتين وقطر مجموعة:

ليكن $(X,d)$ فضاء متري و $A$ و $B$ مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من $X$

المسافة بين مجموعتين وبعد نقطة عن مجموعة:

نسمي:

$$d(A,B) = \inf \{ d(x,y) \ ; \ x \in A \ , y \in B \}$$

or

$$= \inf \{ d(x,y) \} \ ; \ x \in A \ , \ y \in B \quad ---- (1)$$

المسافة بين المجموعتين $A$ و $B$ أو البعد بينهما.

وفي حالة خاصة:

إذا كانت $A = \{x\}$ فإن $d(\{x\},B)$ نعرفها كما يلي:

$$d(\{x\},B) = \inf \{ d(x,y) \ ; \ y \in B \}$$

أو نكتب اختصاراً $d(x,B)$ إن أمن الالتباس.

نتيجة:

إذا كان $(X,d)$ فضاء متري و $A$ و $B$ جزئيتان من $X$ عندئذ:

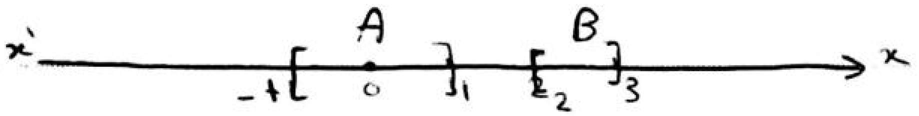
$$\text{if } \ A \cap B \neq \phi \Rightarrow d(A,B) = 0$$

إلا أن عكس هذه النتيجة ليس صحيحاً بشكل عام.

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال:

لتكن المجموعتان $A = [-1,1]$ و $B = [2,3]$




نلاحظ هنا أن $A \cap B = \emptyset$ ، إلا أن $d(A,B) = 1 \neq 0$

حسب الشكل جانباً.

**مثال:**

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$; (x,y) \longmapsto d(x,y) = |x-y| \qquad ; x,y \in \mathbb{R}$$

ولنأخذ المجموعتين:

$$A = [1,2[ \qquad , B = (2,3]$$

واضح أن $A \cap B = \emptyset$ بينما:

$$d(A,B) = \inf\{(0,2]\} = 0$$

مما يدل على أن النتيجة ليست معلومة ، والعكس ليس صحيحاً بشكل عام..

**مثال:**

ليكن لدينا التطبيق:

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad ; (x,y) \longmapsto d(x,y) = |x-y|$$

$$; x,y \in \mathbb{R}$$

وكانت $A = [1,2]$ $B = [1,3]$ فأوجد:

1- المسافة بين $\{2\}$ و $A$ ..

2- المسافة بين $A$ و $B$ ..

لإيجاد 1- : يكون:

$$d(2,2) = 0 \qquad d(2,1) = |2-1| = 1$$

إذاً: $0 \leq d(\{2\}, A) \leq 1$ لكل $x \in A$ ومنه

Alnour

Scanned by CamScanner

$d(\{2\}, A) = \inf\{[0,1]\} = 0$

وعلى نفس المنوال نحسب المثال التالي..

قطر مجموعة والمجموعة المحدودة في فضاء متري:

إذا كانت $A$ مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري $(X, d)$ وكان:

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) \quad ; \quad x, y \in A\} \quad \ldots\ldots (2)$$

فنسمي العدد $\delta(A)$ قطر المجموعة $A$ ونضع اصطلاحاً $\delta(\phi) = 0$

ونقول عن مجموعة جزئية $A$ من $X$ أنها محدودة بالنسبة للمسافة $d$

إذا كان قطرها محدوداً أي إذا كانت $\delta(A) < \infty$

وخلاف ذلك تكون المجموعة غير محدودة إذا كانت $\delta(A) = \infty$

نتيجة:

نفرض أن $(X, d)$ فضاء متري و $A$ و $B$ مجموعتان جزئيتان غير خاليتين

من $X$، عندئذ:

$n_1)$ $0 \leq \delta(A) \leq \infty$

$n_2)$ if $A \subseteq B \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$

$n_3)$ $\delta(A) = 0 \Leftrightarrow A \neq \phi$

$n_4)$ if $A \cap B \neq \phi \Rightarrow \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$

مثال:

لتكن $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) = |x - y| \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

ولتكن:

i) $A = [3, 5[$ ii) $B = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\delta(A) = ?$ $\delta(B) = ?$

Scanned by CamScanner

$\delta(A) = \sup\{[0,2]\} = 2 < \infty$

إذاً A محدودة حسب التعريف ..

$\delta(B) = \sup\{1, 2, ---\} = \sup \mathbb{N} = \infty$

إذاً B غير محدودة ..

ب) في حال كانت A مثلاً مجموعة منتهية من العناصر فتكون عندها محدودة ويكون قطرها

$\delta(A) = \max\{d(x,y) \; ; \; x,y \in A\}$

تعريف : المتتالية في الفضاء المتري : (لاحقاً)

5- ] المتتاليات المتقاربة والكوشية في الفضاءات المترية :

1- المتتاليات في $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ تلعب دوراً كبيراً في حسابي التفاضل والتكامل و المشترك على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ هو الذي يمكننا من تعريف مفهوم التقارب لهذه المتتاليات ..

تع$_1$ : المتتالية في فضاء متري :

المتتالية $\{x_n\}$ في $(X, d)$ فضاء متري تعرّف على أنها تطبيق (تابع) من $\mathbb{N}$ إلى قيم من $(X, d)$ أي أن :

$f : \mathbb{N} \longrightarrow (X,d) \quad ; \quad n \longmapsto f(n) = x_n$

$; \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ---\}$

نسمي هنا $x_n$ بالحد النوني (العام) للمتتالية، ومنها $x_1$ هو الحد الأول $x_2$ هو الحد الثاني ...... وهكذا ..

تع$_2$ : المتتالية المتقاربة :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية في الفضاء المتري $(X, d)$ نسميها متقاربة إذا وجد

Scanned by CamScanner

عنصر $x \in X$ يتمتع بالخاصة التالية:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad ; \quad n > N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

--- (1)

- في هذه الحالة نقول عن المتتالية المفروضة إنها تتقارب من العنصر $x$ ونسمي $x$ هنا: نهاية في المتتالية المفروضة ونكتب:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \text{أو} \quad x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \quad \text{أو} \quad d(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

وفيما عدا ذلك تكون المتتالية متباعدة..

مثلاً: المتتالية العددية: $x_n = \frac{1}{n}$ ; $(n \geq 1)$ تتقارب من الصفر في الفضاء المتري $(\mathbb{R}, d)$ لكنها لا تتقارب في الفضاء $(]0, \infty[, d)$ الذي يشكل فضاء مترياً جزئياً من $(\mathbb{R}, d)$

نخلص إلى أن تعريفنا للمتتالية المتقاربة لا يتعلق فقط بالمتتالية وإنما يتعلق أيضاً بالفضاء المتري..

ت 3: المتتالية الكوشية - الأساسية - المتقاربة في نفسها:

نسمي المتتالية $\{x_n\}$ في الفضاء المتري $(X, d)$ كوشية إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

--- (2)

وبعبارة أخرى نقول:

المتتالية $\{x_n\}$ هي كوشية في الفضاء المتري $(X, d)$ إذا كان:

$$d(x_n, x_m) \xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}]{} 0$$

Scanned by CamScanner

/ /

مثال:

نرى هنا أكثر من مرة أن المتتالية $x_n = \frac{1}{n}$ كوشية في $\mathbb{R}$ وهي متقاربة من الصفر في $\mathbb{R}$، أي أننا نستطيع أن نجعل $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \epsilon$ وأثبتنا ذلك ..

-) بالنسبة للمتتاليات المتقاربة توجد خواص مألوفة مثل وجود النهاية لمتتالية محدود بقها، وهاتان الخاصتان تنتقلان معنا من الفضاء $\mathbb{R}$ إلى الفضاءات المترية العامة ..

مبرهنة: p.49

ليكن $(X, d)$ فضاءً مترياً، عندئذ يكون:

•) للمتتالية المتقاربة نهاية وحيدة وهذه المتتالية تكون محدودة، والأمثلة كثيرة

••) كل متتالية متقاربة في $(X, d)$ هي كوشية، إلا أن العكس ليس صحيحاً بشكل عام، ولكن يكون العكس صحيحاً إذا كان الفضاء تاماً (سيذكر فيما بعد)

•••) في المتتالية الكوشية إذا وجدت متتالية جزئية متقاربة فعندها تكون الكوشية متقاربة

مثلاً: $x_n = \frac{1}{n}$ و $\frac{1}{2n}$ جزئية منها وهي متقاربة إذاً $\frac{1}{n}$ متقاربة وأيضاً:

كما نعلم أن كل كوشية هي محدودة وكل جزئية كوشية تكون أيضاً متتالية كوشية .. (الاثبات مطلوب)

Scanned by CamScanner